Inspectoratul Şcolar Judeţean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A- XII-A

15 februarie 2015

**1.** Să se calculeze:

a. $\int \frac{e^{2x}+x^3+5x^2-1}{e^{2x}+3x^3+6x^2-12x+9}dx, x\in(0,\infty)$. (supliment GM);

b. $\int \frac{1}{x^4+x^{10}}dx, x\in(0,\infty)$.(supliment GM).

**2.** Fie o funcţie bijectivă, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $q\in\mathbf{R}$ cu $f(q)=2$. Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$\circ$” prin: $a\circ b=f(f^{-1}(a)+f^{-1}(b)-q)\forall a,b\in\mathbf{R}$.

a. Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie si simetricul lui $a\in\mathbf{R}$ în raport cu legea „$\circ$”;

b. Pentru $f(x)=x^3$, rezolvaţi ecuaţia: $x^2\circ x=(6-q)^3$. (supliment GM).

**3.** Fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^n x}dx, n\geq 1$.

a. Calculaţi $I_1$;

b. Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita lui. (Jenică Crînganu).

**4.** Să se determine morfismele de grupuri de la $(\mathbf{Z}_p,+)$ la $(\mathbf{Z}_p^*,\cdot)$, unde $p\in\mathbf{N}$ este un număr prim.( Constantin Niţă).

Nota :Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele se noteaza cu 7 puncte